(1) 3 チーム以上で総当たり戦を行った結果、勝数が等しい 2 つのチームが存在した。
三すくみ（※）が少なくとも 1 つ存在することを示せ。ただし、すべての試合で引き分けはないものとする。
※「三すくみ」とは当該チーム間の勝敗が 3 チームとも 1 勝 1 敗となるような 3 チームの組のことである。

(2) あるカーリング大会に男女とも 10 チームが参加し、それぞれ総当たり戦が行われた。
図 1 はこの大会の結果である。次の①～④のうち正しいものを選べ。

①男子の方が三すくみの個数が多い
②女子の方が三すくみの個数が多い
③男女とも三すくみの個数は同じである
④図 1 の情報のみでは、①～③のいずれか判断できない

男子

順位	国名	試合数	勝	負
1	SWE	9	7	2
2	CAN	9	6	3
3	USA	9	5	4
4	GBR	9	5	4
5	CHE	9	5	4
6	NOR	9	4	5
7	KOR	9	4	5
8	JPN	9	4	5
9	ITA	9	3	6
10	DNK	9	2	7

女子

順位	国名	試合数	勝	負
1	KOR	9	8	1
2	SWE	9	7	2
3	GBR	9	6	3
4	JPN	9	5	4
5	CHN	9	4	5
6	CAN	9	4	5
7	CHE	9	4	5
8	USA	9	4	5
9	RUS	9	2	7
10	DNK	9	1	8

図 1 ：勝敗表

(3) 総当たり戦の途中経過の星取表が与えられたとき、全試合終了後の、考えうる三すくみの個数の最大値を求めるプログラムを作成せよ。ただし、すべての試合で引き分けはないものとする。

問題 (1)

解答

勝数が等しい 2 つのチーム T_A, T_B が存在し、T_A が T_B に勝ったとします。（逆の場合も同様です）

T_B の T_A 以外のチームに対する勝数は、T_A の T_B 以外のチームに対する勝数より 1 多いので、T_A に勝ち T_B に負けたチーム T_C が存在します。このとき、T_A, T_B, T_C の 3 チームは三すくみを構成します。

問題 (2)

解答

三すくみの個数は勝敗表のみから求められることを示します。

3 チーム間の成績は「三すくみ」か「ある 1 チームが 2 勝」のいずれかです。「三すくみ」のとき 3 チーム間で 2 勝したチームは存在しませんので、チーム T_i の勝数を w_i とおけば、後者の組み合わせ数は、「あるチーム及びそのチームが勝った 2 チーム」の計 3 チームの組み合わせ数と等しく、

$$\sum_i {}_{w_i}C_2$$

となります。ただし、${}_nC_k$ は二項係数で、便宜上 ${}_0C_2 = {}_1C_2 = 0$ とします。

以上より、n チームによる総当たり戦の三すくみの個数は

$$ {}_nC_3 - \sum_i {}_{w_i}C_2 \tag{1}$$

と表せます。与えられた勝敗表に対して式 (1) を計算すると、男子は 32、女子は 21 となりますので、正解は「①男子の方が三すくみの個数が多い」であることが分かります。

問題 (3)

方針

入力データは最大でチーム数が 1000 ですので、三すくみの個数の最大値を全検索で求めるのは処理時間の観点から困難です。

三すくみの個数の最大値を効率よく求めるために、まず、どのようなときに三すくみの個数が多くなるかを考えます。

全チームの勝数の和は総当たり戦の試合数に等しく $\frac{1}{2}n(n-1)$ であることを利用すると、式 (1) より、三すくみの個数は

$$
\begin{aligned}
{}_nC_3 - \sum_i {}_{w_i}C_2 &= \frac{1}{6}n(n-1)(n-2) + \frac{1}{2}\sum_i w_i - \frac{1}{2}\sum_i w_i^2 \\
&= \frac{1}{6}n(n-1)(n-2) + \frac{1}{4}n(n-1) - \frac{1}{2}\sum_i w_i^2 \\
&= \frac{1}{12}n(n-1)(2n-1) - \frac{1}{2}\sum_i w_i^2 \qquad (2)
\end{aligned}
$$

と表せます。このことから全チームの勝数の 2 乗和が小さいほど、つまり全チームの「勝数が均一である」ほど三すくみの個数が多くなると言えます。

以下では、入力データで勝敗が決められている対戦を「固定対戦」、決められていない対戦を「非固定対戦」と呼ぶことにします。また、T_A が T_B に <u>非固定対戦で</u> 勝っているとき、$T_A \rightarrow T_B$ （もしくは $T_B \leftarrow T_A$）と表すことにします。

まず、すべての非固定対戦に適当に勝敗を与えます。この状態を「初期状態」と呼ぶことにします。初期状態から非固定対戦の結果を変えていくことで、三すくみの個数を増やすことを考えます。

ここで、次の「操作」を考えます。

> 操作：
>
> $T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow \cdots \rightarrow T_m$ であって、勝数が $w_1 \geqq w_2 \geqq \cdots \geqq w_m$ かつ $w_1 - w_m \geqq 2$ であるチーム列 $T_1, T_2, \cdots, T_m$ が存在するとき、
> これら $(m-1)$ 個の非固定対戦の勝敗を入れ替えて、$T_1 \leftarrow T_2 \leftarrow \cdots \leftarrow T_m$ とする

この「操作」により、T_1 の勝数が 1 減り、T_m の勝数が 1 増えるので、式 (1) より、三すくみの個数は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\left(w_1^2+w_m^2\right)-\left((w_1-1)^2+(w_m+1)^2\right)\right) &= w_1-w_m-1\\ &> 0\end{aligned}$$

個だけ増加します。

「操作」を行うと三すくみの個数は増加しますが、三すくみの個数は有限なので、任意の初期状態に対して繰り返し行える「操作」の回数は有限です。

結論を先に言うと、「操作」を可能な限り繰り返し行い、[1]それ以上行えなくなった状態で三すくみの個数は最大値を取るのですが、このことを以下で証明します。[2]

証明

「操作」をこれ以上行えない状態で、三すくみの個数は最大値を取ることを証明します。まず、以下の命題を証明します。

命題

「操作」をこれ以上行えない状態のとき、次の条件をすべてみたすようにチームをグループ $1, 2, \cdots, k$ $(k \geqq 1)$ に分けることができる。ただし、グループ i に属するチームの勝数の最大値を $w_{i,max}$、最小値を $w_{i,min}$ とする。

1. 任意のグループ $i(1 \leqq i \leqq k)$ には 1 つ以上のチームが属する
2. 任意のグループ $i(1 \leqq i \leqq k)$ に対して、$w_{i,max} - w_{i,min} \leqq 1$
3. $1 \leqq i < j \leqq k$ のとき、$w_{i,max} > w_{j,max}$
4. $1 \leqq i < j \leqq k$ のとき、グループ i に属する任意のチーム T_A とグループ j に属する任意のチーム T_B の対戦が非固定対戦であれば、$T_A \leftarrow T_B$

命題の証明

「操作」をこれ以上行えない状態のとき、条件をすべてみたすようにグループ 1 を作成できることを示せば、残りのチームに対して同様にグループ 2, 3, $\cdots$ を順に作成できるため、命題が示せます。つまり、全チームの勝数の最大値を w_{max} としたとき、

[1]勝敗を与えるとき、その時点で（勝数-敗数）が大きい方が負けるように与えていくなど、初期状態での各チームの勝数がなるべく均一になるようにしておくと「操作」の回数が少なくなります。

[2]つまり、初期状態や「操作」の順番によって異なる最終状態に到達したとしても、すべての最終状態において三すくみの個数は等しく最大値を取ることを証明します。

1'. グループ 1 には 1 つ以上のチームが属する

2'. グループ 1 に属するチームの勝数は w_{max} もしくは $w_{max}-1$

3'. グループ 1 に属さないチームの勝数は $w_{max}-1$ 以下

4'. グループ 1 に属する任意のチーム T_A とグループ 1 に属さない任意のチーム T_B の対戦が非固定対戦であれば、$T_A \leftarrow T_B$

をすべてみたすようなグループ 1 を作成できることを示せば十分です。
グループ G を次のいずれかをみたすすべてのチームから構成します。

- w_{max} 勝のチーム
- $(w_{max}-1)$ 勝のチーム T_C であって、$T_A \rightarrow T_{B_1} \rightarrow T_{B_2} \rightarrow \cdots \rightarrow T_{B_k} \rightarrow T_C$ となるような w_{max} 勝のチーム T_A と $(w_{max}-1)$ 勝のチーム $T_{B_1}, T_{B_2}, \cdots, T_{B_k}$ が存在するチーム [3]

このとき、グループ G はグループ 1 の条件をすべてみたすことを示します。
まず、グループ G の作成方法から条件 1'. 2'. 3'. は明らかにみたします。
次に、「操作」がこれ以上行えない前提より、G に属する w_{max} 勝のチームは、非固定対戦で $(w_{max}-2)$ 勝以下のチームには勝っていません。また、G に属する $(w_{max}-1)$ 勝のチームは、非固定対戦で $(w_{max}-2)$ 勝以下のチームには勝っていません。[4]さらに、グループ G の作成方法より、G に属するチームは、非固定対戦でグループ G に属さない $(w_{max}-1)$ 勝のチームには勝っていません。[5]
よって、G は条件 4'. もみたしますので、グループ G はグループ 1 の条件をすべてみたします。
以上より命題が示されました。

「操作」をこれ以上行えない任意の状態を状態 X とします。また、非固定対戦すべてに適当に勝敗を与えた任意の状態を状態 Y とします。
状態 X において、上記の命題の条件をみたすようにグループ $1, 2, \cdots, k$ にグループ分けを行います。
状態 X において、グループ順、同一グループ内は勝数の多い順に全チームを並べたとき、$T_{x_1}, T_{x_2}, \cdots, T_{x_n}$ であるとし、その勝数を $w_{x_1}, w_{x_2}, \cdots, w_{x_n}$ とおきます。グループ分けの条件より、勝数列 $\{w_{x_i}\}$ は広義単調減少列です。

[3] $k=0$ つまり $T_A \rightarrow T_C$ でも構いません

[4] G に属する $(w_{max}-1)$ 勝のチーム T_C が非固定対戦で $(w_{max}-2)$ 勝以下のチーム T_D に勝っているとすると、G の作成方法より w_{max} 勝のチーム T_A が存在して、$T_A \rightarrow \cdots \rightarrow T_C \rightarrow T_D$ となるため、「操作」がこれ以上行えない前提に矛盾するからです。

[5] G に属するチーム T_C が非固定対戦で $(w_{max}-1)$ 勝以下のチーム T_D に勝っているとすると、T_C が w_{max} 勝、$(w_{max}-1)$ 勝いずれの場合も、グループ G の作成方法よりチーム T_D も G に含まれるはずだからです。

一方、状態 Y においても X と同じグループ分けを考え、グループ順、同一グループ内は勝数の多い順に全チームを並べたとき、$T_{y_1}, T_{y_2}, \cdots, T_{y_n}$ であるとし、その勝数を $w_{y_1}, w_{y_2}, \cdots, w_{y_n}$ とおきます。[6]

ここで、状態 X が条件 4. をみたすことに注意すると、グループ t に属するチーム数を $g(t)$、t 以下の番号のグループに属するチーム数を $h(t) = \sum_{i=1}^{t} g(i)$ とおけば、任意の t $(1 \leqq t \leqq k)$ に対し、

$$\sum_{i=1}^{h(t)} w_{x_i} \leqq \sum_{i=1}^{h(t)} w_{y_i} \tag{3}$$

が成立します。[7]ただし、便宜上、$h(0) = 0$ とします。

また、任意の s $(1 \leqq s \leqq n)$ に対して、$h(a-1) < s \leqq h(a)$ となる a を考え、状態 X におけるグループ a に属するチームの勝数の最大値、最小値をそれぞれ $w_{a,max}, w_{a,min}$ とします。このとき、$\sum_{i=1}^{s} w_{x_i} > \sum_{i=1}^{s} w_{y_i}$ と仮定すると、$t = a-1$ で式 (3) が成立することから $w_{y_s} < w_{g,max}$、$t = a$ で式 (3) が成立することから $w_{y_s} > w_{g,min}$ なので、併せて $w_{g,min} < w_{y_s} < w_{g,max}$ ですが、これは条件 2. つまり $w_{g,max} - w_{g,min} \leqq 1$ に矛盾します。

よって、任意の s $(1 \leqq s \leqq n)$ に対して、

$$\sum_{i=1}^{s} w_{x_i} \leqq \sum_{i=1}^{s} w_{y_i}$$

が成立します。ここで、$w_{y_1}, w_{y_2}, \cdots, w_{y_n}$ を大きい順に並べ替えた数列を $w_{y'_1}, w_{y'_2}, \cdots, w_{y'_n}$ とすれば、任意の s $(1 \leqq s \leqq n)$ に対し、

$$\sum_{i=1}^{s} w_{x_i} \leqq \sum_{i=1}^{s} w_{y_i} \leqq \sum_{i=1}^{s} w_{y'_i} \tag{4}$$

となります。ここで、

$$\begin{aligned} T(i) &= w_{y'_i} + w_{x_i} \\ R(i) &= w_{y'_i} - w_{x_i} \\ S(k) &= \sum_{i=1}^{k} R(i) \end{aligned}$$

[6]状態 Y におけるこのグループ分けは条件をみたすとは限りません。また、勝数列 $\{w_{y_i}\}$ は広義単調減少列とは限りません。

[7]t 以下の番号のグループに属するチームの集合をチーム群 $\{T\}_t$ とすれば、$\{T\}_t$ に属するチームの勝数の合計は、①$\{T\}_t$ に属するチームが $\{T\}_t$ に属するチームに勝った数の合計、②$\{T\}_t$ に属するチームが $\{T\}_t$ に属さないチームに固定対戦で勝った数の合計、③$\{T\}_t$ に属するチームが $\{T\}_t$ に属さないチームに非固定対戦で勝った数の合計　の和ですが、①と ②は状態によらず一定であり、③$\{T\}_t$ は状態 X において 0 だからです。

とおきます。ただし、$T(n+1)=0$ とします。

このとき、勝数列 $\{w_{x_i}\},\{w_{y'_i}\}$ がともに広義単調減少列であることから $T(i)$ も広義単調減少列であり、また、式 (4) より、任意の s に対して $S(s) \geqq 0$ なので、式 (2) より、

$$
\begin{aligned}
(\text{状態 } X \text{ の三すくみの個数}) - (\text{状態 } Y \text{ の三すくみの個数}) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(w_{y'_i}^2 - w_{x_i}^2) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(w_{y'_i} + w_{x_i})(w_{y'_i} - w_{x_i}) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}T(i)R(i) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(T(i) - T(i+1))S(i) \\
&\geqq 0
\end{aligned}
$$

以上より、「操作」をこれ以上行えない任意の状態 X の三すくみの個数が、任意の状態 Y の三すくみの個数以上であること、つまり、「操作」をこれ以上行えない状態で三すくみの個数は最大値を取ることが示されました。

疑似コード

```
# 適当に勝敗を埋めて初期状態を作成する
FOR　i　(1 ≦ i ≦ n)
  FOR　j　(i < j ≦ n)
    IF　T_i と T_j が非固定対戦　THEN
      この時点で（勝数 - 敗数）が大きい方が負けるように勝敗を与える
    ENDIF
  ENDFOR
ENDFOR

# 可能な限り操作を行う
REPEAT
  探索対象のチームの勝数の最大値を w_max とおく
  チーム列 T_1→ T_2→ ··· → T_m (w_max = w_1≧ w_2≧ ··· ≧ w_m, w_1 − w_m≧ 2) を探索する
  IF　チーム列が存在する　THEN
    これらの非固定対戦の結果を入れ替える（「操作」を行う）
  ELSE
    命題の”グループ G”の条件をみたすチーム（※）を探索対象から除外する
  ENDIF
UNTIL　探索対象のチームが残っている

# 三すくみ数を計算する
式 (1) を用いて、各チームの勝利数から三すくみ数を求める
```

命題の”グループ G”の条件をみたすチーム（※）は次のいずれかをみたすすべての探索対象のチームのことです。

- w_{max} 勝のチーム
- $(w_{max}-1)$ 勝のチーム T_C であって、$T_A \to T_{B_1} \to T_{B_2} \to \cdots \to T_{B_k} \to T_C$ となるような w_{max} 勝のチーム T_A と $(w_{max}-1)$ 勝のチーム $T_{B_1}, T_{B_2}, \cdots, T_{B_k}$ が存在するチーム ($k=0$ つまり $T_A \to T_C$ でも可)