図 1 のような、一辺 1 の正三角形 6 個からなる 2 種類のタイル (a), (b) があります。
与えられた図形を、これら 2 種類のタイルを用いて敷き詰めることを考えます。
このとき、タイルは三角形格子に沿って重なりなく置くものとし、(a), (b) のうち一方のみを用いてもよいものとします。また、タイル (b) は回転や反転をさせて用いても構いません。

(1) 図 2 のような一辺 5 の正六角形を敷き詰める方法を 1 つ例示してください。

(2) 2 種類のタイルで敷き詰められる図形が与えられたとき、敷き詰め方によらず用いられるタイル (a) の枚数を 3 で割った余りが一定であることを示してください。
例えば、図 3 のような図形は、図 4, 図 5 のように異なる敷き詰め方がありますが、
タイル (a) は図 4 では 4 枚、図 5 では 1 枚用いられており、3 で割った余りは共に 1 となります。

(3) 2 種類のタイルで敷き詰められる穴のない図形が与えられたとき、敷き詰め方によらずタイル (a) の枚数が一定であることを示してください。

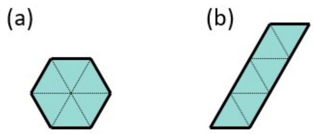

図 1

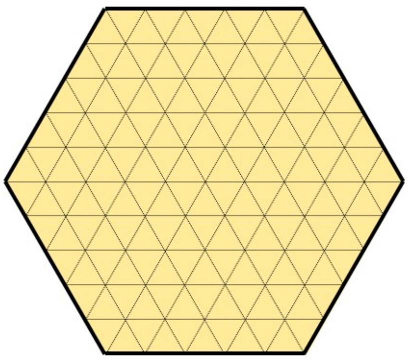

図 2

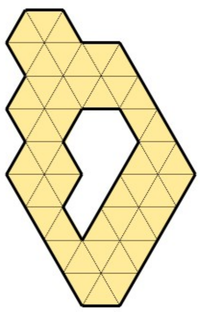

図 3

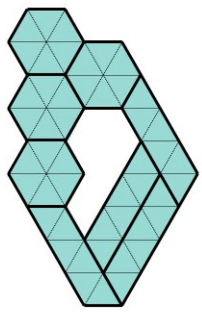

図 4

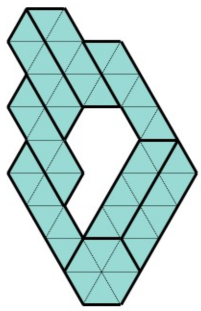

図 5

問題 (1)

解答

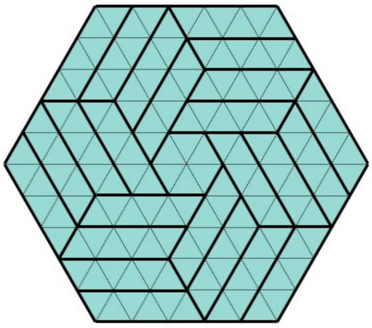

図 6

問題 (2)

解答

上向きの三角形に数 $0, 1, 2$ が書かれた図 7 のような三角形格子を考えます。

この格子に沿ってタイルをどのように置いても、タイル (a) の内部に含まれる数の和は 3 で割ると 1 余る数となり、タイル (b) の内部に含まれる数の和は 3 の倍数となります。

このことから、タイル (a), (b) で敷き詰められる図形が与えられたとき、図形をこの格子に沿って置いたときの内部の数の和に注目すれば、敷き詰め方によらず、使用されるタイル (a) の枚数を 3 で割った余りは一定となることが分かります。

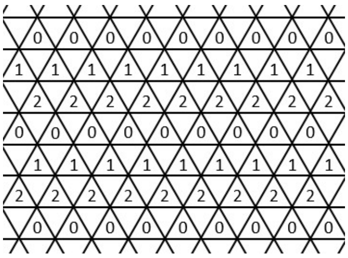

図 7

問題 (3)

方針

示すべき命題は「穴がない図形を敷き詰めるときタイル (a) の枚数が一定」、つまり穴がない図形に対しては問題 (2) の主張よりも強い制限がある、というものです。図 7 のような単純な塗り分けでは穴の有無を表現できないため、同様の方針での証明は難しそうです。

ここでは、穴の有無に依存する性質として、図形の周に注目してみましょう。

解答

まず、穴のない図形の周を適当な頂点から反時計回りに一周辿り、辿る向きと文字を関連付けた図 8 の変換に従って、図形の周に対応する文字列を用意することを考えます。例えば、図 9 のような図形の周を図の赤い点から反時計回りに一周辿ったときの文字列は「$A^-B^+A^-B^+C^-A^+B^-A^+B^-C^+$」となります。

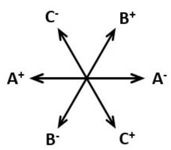

図 8

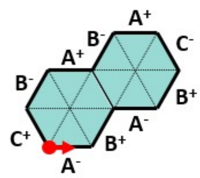

図 9

次に、上向きの三角形に文字 A, B, C が書かれた図 10 のような三角形格子を考えます。この三角形格子を変換格子と呼ぶことにします。[1]

変換格子上で、先ほど考えた図形の周に対応する文字列に従って経路を辿ります。ただし、例えば文字 A^+ は A と書かれた三角形を反時計回りに 1 辺、文字 A^- は A と書かれた三角形を時計回りに 1 辺辿ることを意味するものとします。また、変換格子の各頂点からは、A, B, C の時計回り、反時計回りに相当する辺がそれぞれ 1 本ずつ出ているため、開始点を決めれば経路は一意に定まります。

例えば、図 9 のような図形の周に対応する文字列「$A^-B^+A^-B^+C^-A^+B^-A^+B^-C^+$」を変換格子上で辿ると、図 11 ような経路となります。

[1]図 7 のようなタイルを置く三角形格子とは別物と考えてください。

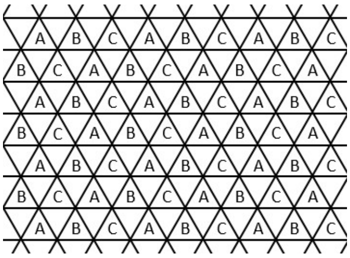

図 10

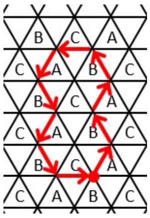

図 11

タイル (a)1 枚からなる図形およびタイル (b)1 枚からなる図形に対応する文字列と変換格子上での経路の一例を考えると、それぞれ図 12、図 13 のようになります。また、タイル (a)1 枚からなる図形、タイル (b)1 枚からなる図形ともに、タイルの向きや周を辿るときの開始点に関わらず、常に変換格子上での経路は始点と終点が等しい閉路になります。

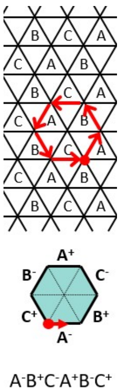

図 12

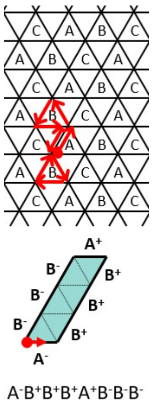

図 13

ここで、閉路が A と書かれた三角形 1 個を反時計回りに 1 回巻くとき[2]、その閉路の<u>巻き数</u>を 1、時計回りに 1 回巻くとき<u>巻き数</u>を-1 と定義します。すると、タイル (a)1 枚

[2] B と書かれた三角形、もしくは C と書かれた三角形に着目しても同様のことが言えます。

からなる図形に対応する閉路の巻き数は常に 1、タイル (b)1 枚からなる図形に対応する閉路の巻き数は常に 0 となります。[3]

さらに、図 14 のように、文字列 W_1W_2 の周を持つ穴のない図形 1 と、文字列 W_3W_4 の周を持つ穴のない図形 2 が、文字列 W_2 と W_3 の部分の境界を共有して文字列 W_1W_4 の周を持つ穴のない図形 3 を生成するとき、W_3 に対応する変換格子上での経路は W_2 に対応する経路を逆に辿ったものなので、文字列 $W_1W_2W_3W_4$ に対応する変換格子上での閉路の巻き数は、図形 3 の周 W_1W_4 に対応する閉路の巻き数と等しくなります。

このことから、周に対応する文字列が閉路を形成する図形を組み合わせてできる図形は、その周に対応する文字列も閉路を形成し、巻き数は各図形の巻き数の和となると言えます。

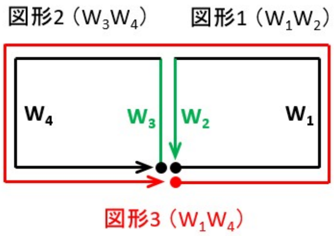

図 14

穴のない図形を 2 種類のタイル (a), (b) で敷き詰める方法が与えられたとき、常に穴のない連結な図形であるように 1 枚ずつタイルを置いていくことが可能であることに注意すると[4]、2 種類のタイル (a), (b) で敷き詰められる穴のない図形に対応する変換格子上での経路は必ず閉路となり、その巻き数は、使用された個々のタイルに対応する閉路の巻き数の和に等しくなることが分かります。

以上より、2 種類のタイル (a), (b) で敷き詰められる穴のない図形が与えられたとき、敷き詰め方によらず、その図形に対応する閉路の巻き数と同数のタイル (a) が必要であることが示されました。

[3]周に対応する変換格子上での経路が閉路となるため、巻き数は周を辿る開始点に依存しません。また、変換格子は回転対称な格子なので、巻き数は変換格子上での開始点にも依存しません。

[4]2 種類のタイル (a), (b) で穴のない図形を敷き詰めたとき、図形の境界の 1 箇所のみで周を共有するタイルが必ず存在します。このようなタイルを順に取り除いていくことで、常に穴のない連結な図形を維持したまますべてのタイルを取り除くことができます。この取り除く順の逆順でタイルを並べていくことで、常に穴のない連結な図形であるようにタイルを敷き詰めていくことができます。